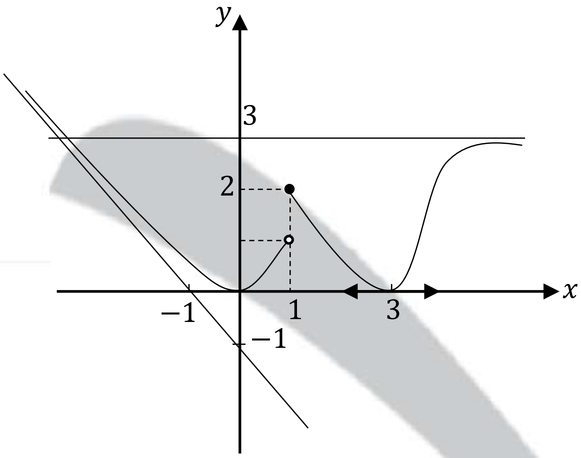
ورقة عمل في مادة الرياضيات

الصف الثالث الثانوي العلمي (2019 - 2020)

ملاحظات عامّة:

1. يحذف درجتان لكل خطأ حسابي من الدرجات المخصصة للخطوة التي وقع فيها الخطأ.
2. إذا دمج الطالب خطوتين أو أكثر، يُعطى الطالب مجموع الدرجات المخصصة لما دمج من خطوات.
3. إذا أخطأ الطالب في خطوة من خطوات الحل ثم تابع الحل بمنطق سليم فيعطى عن الخطوات التي تليها ما يستحق من درجات **بشرط** ألا يؤدي خطؤه إلى تغيير مضمون السؤال.
4. إذا حل الطالب سؤالاً بأكثر من طريقة تُأخذ علامة الطريقة الأعلى درجة.

أولاً) أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: بفرض C_f الخط البياني للتابع f المرسوم جانباً:

1) **أوجد ما للخط C من مستقيمات مقاربة.**

2) **احسب $f(0)$, $\grave{f}(0)$, $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)$, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}$.**

3) **أثبت أن $f(1)=2$ قيمة كبرى محلية.**

4) **هل f مستمر عند $x=1$**

الدرجة	الخطوة	رقم الخطوة
5	$y=3$ مقارب أفقي	1
5	$y=-x-1$ مقارب مائل	2
3+3	$f'(0)=0$, $f(0)=0$	3
5	$\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)=f'(3)=0$	4
5	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$	5
5 5	نختار مجال مفتوح $I=]0,2[$ يحوي (1) بحيث إذا كان $x\in\left(D_f\cap I\right)$ كان $f(x)\le f(1)$	6
3+1	لا ، لأن $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$	7

<u>السؤال الثاني:</u> ليكن العدد العقدي $Z = (\frac{-4+4i}{\sqrt{2}})(\sqrt{3} - 3i)$ والمطلوب:

أثبت أن $|Z| = 8\sqrt{3}$ و $argZ = \frac{5\pi}{12}$ ثم استنتج الشكل الأسي للعدد Z.

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$\|Z\| = \left\|\left(\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} - 3i)\right\| = \left\|\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right\|.\|\sqrt{3} - 3i\| = 8\sqrt{3}$	10+5
2	$\arg Z = \arg\left(\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right) + \arg(\sqrt{3} - 3i) = \frac{5\pi}{12}$	10+5
3	$Z = re^{i\theta} = 8\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{12}}$	3+3

....

<u>السؤال الثالث:</u> ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D = [0, 3]$ وفق $f(x) = x\sqrt{a-x}$

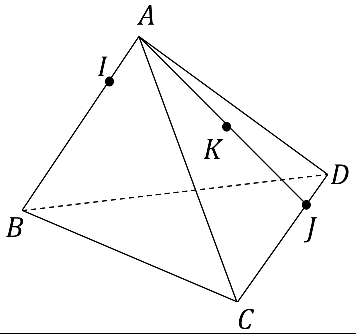
1) أوجد قيمة a إذا علمت أن الخط البياني يقبل مماساً أفقياً عند $x = 2$

2) إذا علمت $a = 3$ ، ادرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند $x = 3$ من اليسار وفسّر النتيجة هندسياً.

3) أوجد قيمة تقريبية لـ $f(1.9)$

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$f'(2) = 0$	5
2	f اشتقاقي على $[0, 3[$	5
3	$f'(x) = \sqrt{a-x} - \frac{1}{2\sqrt{a-x}}(x)$	5
4	$f'(2) = \sqrt{a-2} - \frac{2}{2\sqrt{a-2}} = \frac{a-2-1}{2\sqrt{a-2}} = 0$	3
5	$a = 3$	2
6	$g(x) = \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \qquad D = [0, 3[$	5
7	$g(x) = \frac{x\sqrt{3-x}}{x-3} = -\frac{x}{\sqrt{3-x}}$	2
8	$\lim_{x\to3^-} g(x) = -\infty$	3
9	f غير قابل للاشتقاق عند $x = 3$ C_f يقبل نصف مماس شاقولي من اليسار	5
10	$a = 2 \quad , \quad h = -0.1$ $f(1.9) \cong f(2) + f'(2)(0.-1) \cong 2$	5

....



السؤال الرابع: $ABCD$ رباعي وجوه فيه J نقطة تحقق $2\,\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{JC}$

I نقطة تحقق $3\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ ، K منتصف $[AJ]$

1) أثبت صحة العلاقة $2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DJ})$

2) وضّع النقطة M التي تحقق $2\,\overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$L_1 = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ $= 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$	5
2	$= 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + 3\overrightarrow{IJ} + 2(2\overrightarrow{DJ}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DJ}$	5
3	$= 3\overrightarrow{IJ} + 4\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DJ}$ $= 3\overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{DJ}$	5
4	$= 3(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DJ}) = L_2$	5
5	$2\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$ $2\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BJ}$	10
6	$2\,\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BK}$ $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BK}$ إذاً M تنطبق على K	10

....

ثانياً) حل التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل تمرين)

السؤال الخامس: التمرين الأول: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق $f(x) = 2x - 3E(x)$

1) اكتب f بعبارة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $]0, 2[$.

2) هل f مستمر على المجال $]0, 2[$.

3) أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2+1}$.

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0\,,1[\\ 2x-3 & x \in [1\,,2[\end{cases}$	5 5
2	$x - 1 < E(x) \le x$	10
3	$\frac{-x+3}{x^2+1} > f(x) \ge \frac{-x}{x^2+1}$	10
4	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+3}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x^2+1}\right) = 0$	5+5
5	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ حسب الإحاطة	5

....

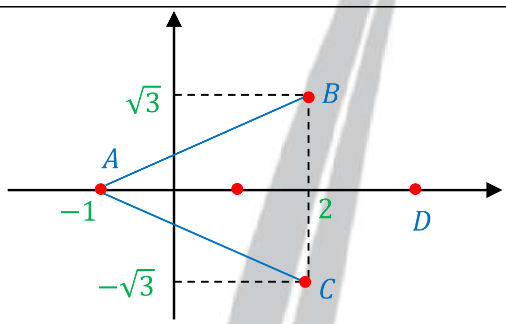
<u>السؤال السادس: التمرين الثانى:</u> نتأمل النقاط $A, , B , C , D$ الممثلة للأعداد العقدية الآتية:

$$d = 3 \text{ و } c = 2 - i\sqrt{3} \text{ و } b = 2 + i\sqrt{3} \text{ و } a = -1$$

(1 ارسم النقاط $A, , B , C , D$ ، ثم احسب AB , AC , BC واستنتج طبيعة المثلث ABC.

(2 احسب العدد $\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث ACD .

(3 أثبت أن D هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1),\ (B,2),\ (C,2)$

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1		4
2	$AB = \lvert Z_{\overrightarrow{AB}} \rvert = \lvert b-a \rvert = \lvert -3 + i\sqrt{3} \rvert = 2\sqrt{3} = BC = AC$	5×3
3	المثلث ABC متساوي الأضلاع	2
4	$\frac{a-c}{d-c} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$	5
5	بعد الضرب بالمرافق $\frac{a-c}{d-c} = \sqrt{3}\, i$	5
6	$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg(\sqrt{3}\, i) = \frac{\pi}{2}$	5
7	المثلث ACD قائم في C	4
8	لنفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A,-1), (B,2), (C,2)$	5
9	$Z_G = \frac{2(Z_C) + 2(Z_B) - 1(Z_A)}{2+2-1}$	5
10	$Z_G = \frac{2(2 - i\sqrt{3}) + 2(2 + i\sqrt{3}) - 1(-1)}{3} \Rightarrow Z_G = \frac{9}{3} \Rightarrow Z_G = 3$	5
11	$-\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$ D مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,-1), (C,2), (B,2)$	5

السؤال السابع: التمرين الثالث: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{0\}$ وفق

$$f(x)=\frac{4x^2-5x-2+2\cos\sqrt{x}}{x}$$

1) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$

2) أثبت أن $\Delta: y=4x-5$ مقارب للخط C بجوار $+\infty$.

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$f(x)=4x-5-2\,\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$	10
2	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}\right)^2$	5+5+5
3	$\lim_{x\to 0} f(x)=-5-2\left(\frac{1}{2}\right)=-6$	5
4	علماً أن : $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$	10
5	$f(x)-y_\Delta=\frac{-2+2\cos\sqrt{x}}{x}$ $-\frac{4}{x}\geq f(x)-y_\Delta\geq 0$	10
6	حسب الإحاطة : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$	10

السؤال الثامن: التمرين الرابع: أولاً: لتكن المعادلة $P(Z)=Z^4-6Z^3+24Z^2-18Z+63=0$

1) تحقق أن $Z_1=i\sqrt{3}$ جذراً للمعادلة $P(Z)=0$ واستنتج جذراً آخر.

2) استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(Z)$ يجعل المعادلة تكتب بالشكل : $(Z^2+3)Q(Z)=0$ حل المعادلة $P(Z)=0$.

ثانياً: في المستوي العقدي المحدث بمعلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{\theta})$ لتكن النقطة M التي تمثل العدد العقدي $Z=x+iy$ ،عين مجموعة النقاط M التي تحقق $Z^2-(1+i)^2=\overline{Z^2}-(1-i)^2$

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$P(i\sqrt{3})=0$	5
2	بما أن الأمثال الحقيقية فإن: $Z_2=\overline{Z_1}=-i\sqrt{3}$	5
3	بما أن $(-i\sqrt{3},i\sqrt{3})$ جذرا للمعادلة فالمعادلة تقبل القسمة على $(Z+i\sqrt{3}),(Z-i\sqrt{3})$ وهي تقبل القسمة على (Z^2+3)	5
4	بالقسمة الاقليدية : $Q(Z)=Z^2-6Z+21$	10
5	$\Delta=-48<0$ للمعادلة حلان عقديان مترافقان	10
6	$Z_3=3-2\sqrt{3}i\quad,\quad Z_4=\overline{Z_3}$	5+5
7	$(x+iy)^2-(1+i)^2=(x-iy^2)-(1-i)^2$	5
8	$2ixy-2i=-2ixy+2i$	5
9	$y=\frac{1}{x}$	5
10	مجموعة النقاط M قطع زائد فرعاه في الربعين الأول والثالث	5

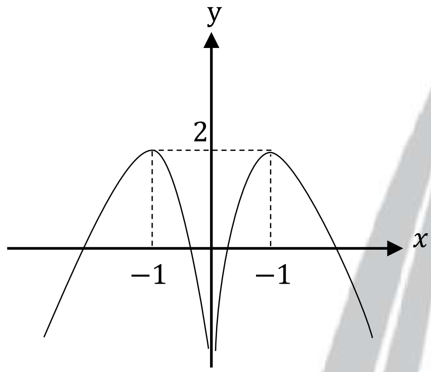
ثالثاً) حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

<u>السؤال التاسع: المسألة الأولى:</u> ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{0\}$ وفق

$$f(x) = -x^2 + \ln(x^2) + 3$$

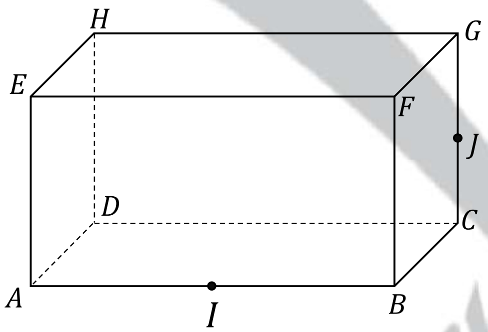
1) **أثبت أن التابع f زوجي واستنتج الصفة التناظرية .**
2) **أثبت أن التابع f اشتقاقي على مجموعة تعريفه.**
3) **ادرس تغيرات التابع f على المجال $]0, +\infty[$ ونظم جدولاً بها واكتب معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x = 1$.**
4) **أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلان مختلفان على المجال $]0, +\infty[$ وأثبت أن أحدهما يقع في المجال $]2, 3[$.**
5) **ارسم C الخط البياني للتابع f على مجموعة تعريفه $R/\{0\}$.**
6) **ناقش بيانياً عدد حلول المعادلة $\ln(x^2) = x^2 - 3 + m$ تبعاً لقيم الوسيط الحقيقي m.**

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$x \in R\backslash\{0\} \Longrightarrow -x \in R\backslash\{0\}$	3
2	$f(-x) = -(-x)^2 + \ln(-x)^2 + 3 = f(x)$	5
3	فالتابع f زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب	5
4	x^2 اشتقاقي وموجب على $R\backslash\{0\}$ ومنه $\ln x^2$ اشتقاقي وموجب على $R\backslash\{0\}$	3+2
5	$-x^2 + 3$ اشتقاقي على $R\backslash\{0\}$	3
6	f معرف ومستمر واشتقاقي على $R\backslash\{0\}$	2
7	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$	5
8	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$ عدم تعيين $-\infty + \infty$ $f(x) = x^2\left[-1 + \frac{\ln x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right]$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	5+2
9	$f'(x) = -2x + \frac{2x}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2x}{x^2}$	5
10	$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow f(1) = 2$	3+2
11	$\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & \| & + & 0 & - & \\ \hline f(x) & \| & & 2 & & \\ & \| -\infty & \nearrow & & \searrow & -\infty \end{array}$	5 5
12	نقطة التماس $(1\,,2)$ والميل $m = f(1) = 0$ معادلة المماس $y = 2$	5
13	على المجال $I_1 =]0\,,1[$ ، f مستمر ومتزايد تماماً على I_1	3
14	$0 \in f(I_1) = \ ]-\infty\,,2[$ فللمعادلة حل وحيد على I_1	2

15	على المجال $I_2 = [1\,,+\infty[$ ، f مستمر ومتناقص تماماً على I_2	3
16	$0 \in f(I_1) = \ ]-\infty\,,2[$ فللمعادلة حل وحيد على I_2	2
17	$f(2) = -1 + \ln 4 > 0$ $f(3) = -6 + \ln 9 < 0$	3 3
18	$f(2).\,f(3) = 0$	5
19		5 لكل فرع
20	المناقشة : $m \in \ ]-\infty\,,2[$ للمعادلة $f(x) = m$ أربعة حلول $m = 2$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان $m \in \ ]2\ \,,+\infty\ [$ المعادلة $f(x) = m$ مستحيلة الحل	3×3

<u>السؤال العاشر: المسألة الثانية:</u> ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

فيه $BC = GC = 1\ ,\ AB = 2$.



النقطة I منتصف $[AB]$ ، النقطة J منتصف $[CG]$.

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

1) **احسب طول (DJ) و (IJ).**
2) **أثبت أن المستقيمين DI و IJ متعامدين ، واحسب $\cos \widehat{IJD}$.**
3) **هل المستقيم (IJ) يوازي (BEG).**
4) **بفرض M_1 مركز ثقل المثلث BEG أثبت أن M, F, D تقع على استقامة واحدة.**
5) **أوجد النقطة M_2 المتساوية البعد عن النقطتين B و H .**

رقم الخطوة	الخطوة	الدرجة
1	$\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right) \implies IJ = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ $\overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right) \implies IJ = \sqrt{4 + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$	5+5 5+5
2	$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{DI} = -1 + 1 + 0 = 0 \implies$ متعامدان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{DJ}$	5+5
3	$\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JD} = \Vert\overrightarrow{JI}\Vert \,.\, \Vert\overrightarrow{JD}\Vert \,.\cos(I\hat{J}D)$	5

	$2+0+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\cos(I\hat{J}D)$ $\cos(I\hat{J}D)=\frac{3}{\sqrt{17}}$	5
4	$\overrightarrow{AG}(2,1,1)$, $\overrightarrow{GH}(-2,0,0)$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات	5+5
5	لنوجد العددان الحقيقيان α , β حيث: $\overrightarrow{IJ}=\alpha\,\overrightarrow{BE}+\beta\,\overrightarrow{BG}$ والشعاعان $\overrightarrow{BE}(-2,0,1)$, $\overrightarrow{BG}(0,1,1)$ ليسا مرتبطين خطياً	10
	$\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\boxed{1}\quad 1=-2\alpha$ $\boxed{2}\quad 1=\beta$ $\boxed{3}\quad 1=\alpha+\beta$	10
	$\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \beta=1\end{cases}$ تحقق العلاقة $\boxed{3}$	5
	المستقيم (IJ) يوازي المستوي (BEJ)	5
6	$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}$	5
	$\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FG}=\vec{0}$ $3\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FD}=\vec{0}$ $\overrightarrow{MF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$	5
7	$\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{MF}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط D , F , M على استقامة واحدة	5
8	نختار M منتصف HB : $M\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	5

....

انتهت الأسئلة